Lucie Ziembová

Výuková situace:
jak zjistit délku kružnice (obvod kruhu) aneb Jak na to šel Archimédés

V praxi nejeden učitel matematiky řeší, jak motivovat žáky k učení se matematice s chutí a porozuměním, jak jim matematiku zprostředkovat, ale hlavně jak to dělat účinně. V tomto článku si přiblížíme konkrétní problémovou úlohu, která by mohla být podnětná, pokud by byl lépe využit její potenciál. V duchu metodiky 3A: anotace – analýza – alterace (Janík et al., 2013) navrhneme variantní možnost práce s touto úlohou tak, aby více napomáhala rozvíjet matematické myšlení žáků, a tím i produktivní kulturu vyučování a učení (se) matematice.

Produktivní kultura vyučování a učení je dána zejména náročnými a motivujícími učebními úlohami, kognitivní aktivizací žáků, konstruktivní prací s chybami, rozvíjením žákovské metakognice a kumulativností učebních procesů, transferem naučeného aj. (srov. Janík, 2013). Těmto obecným charakteristikám odpovídá také pojetí kultury vyučování matematice podle Stehlíkové (2007). Ta charakterizuje kulturu vyučování z pohledu činností učitele takto: učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání, předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy), podporuje žákovu aktivní činnost, rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení, nahlíží na chybu jako na vývojové stadium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci, iniciuje a moderuje diskusi se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů, u žáků se orientuje na diagnostiku porozumění (s. 16).

Uvedené principy byly inspirovány např. prací Hejného a Kuřiny (2001) a dále také analýzami videozáznamů vyučovacích hodin matematiky natočených v rámci TIMSS 1999 (s. 15–16).[1] Zmíněná videostudie ukázala, že v českých hodinách se úlohy kódované jako důkazové nebo odvozovací nevyskytovaly příliš často. Jednalo se o pouhých 5 % hodin, kde se takovýto typ úlohy řešil. Právě tyto úlohy odpovídají pojetí produktivní kultury vyučování a učení, a právě o ně jde v tomto článku.

Pohled do školní praxe: anotace, analýza a alterace výukové situace

Anotace

Kontext výukové situace

Výuková situace byla vybrána z hodiny matematiky v osmém ročníku ZŠ, jejíž záznam byl pořízen v rámci videostudie TIMSS v České republice.

Učitel začíná vyučovací hodinu odkazem na minulé hodiny, kde se žáci zabývali kružnicí a kruhem, řešili vzájemné polohy přímky a kružnice. Zdůrazňuje, že v této hodině se

1 TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je mezinárodním výzkumem v oblasti výsledků vzdělávání žáků čtvrtých a osmých ročníků v matematice a přírodovědných předmětech, který se uskutečňuje od roku 1995 ve čtyřletých cyklech. Česká republika se zúčastnila prvního, druhého a čtvrtého cyklu. V rámci mezinárodního výzkumu TIMSS 1999 Video study (Hiebert et al., 2003) bylo analyzováno asi 100 videozáznamů hodin matematiky v každé zemi.

budou řešit početní úlohy. Následuje opakování vzorců pro výpočet obvodů geometrických útvarů, které již žáci umí určit (čtverec, obdélník, trojúhelník). Dále nastává situace, kde učitel zadá problém, a to *zjistit délku kružnice (je-li známa konstrukce pro obvod pravidelného n-úhelníku)*. Tyto dva pojmy učitel žákům předkládá jako jedno a totéž. Říká, že pro délku kružnice se používá ještě jiné označení, a to *obvod kruhu*[2] (viz analýza níže). V poslední části hodiny se řeší několik úloh, v nichž žáci aplikují odvozený vzorec.

Didaktické uchopení obsahu – činnosti učitele a žáků

Část 1 (4:38–10:41) Užití čtverce k odvození vzorce pro obvod kruhu

Učitel kreslí na tabuli kružnici. Vyzývá žáky, aby přemýšleli, jak odvodit vzorec pro výpočet obvodu kruhu. Motivuje je historickou vsuvkou, že už Archimédés si s tím poradil. Ptá se žáků, kdo má nějaký nápad. Žák navrhuje nakreslit do obrázku čtverec – opsat ho kružnici. Žák kreslí navrhovanou možnost na tabuli. Učitel na tabuli zakresluje průměr kružnice a s žáky diskutuje o tom, že průměr kružnice je vlastně délka strany čtverce. Diskutují o chybě, které se dopouští, když zamění obvod opsaného čtverce za obvod kruhu. Následují další návrhy, které ale nevedou k řešení. Další žák navrhuje čtverec vepsat do kružnice. Učitel tuto možnost zakresluje do obrázku na tabuli a ptá se, čím je ve čtverci průměr kružnice. Žáci odpovídají, že jeho úhlopříčkou. Následuje diskuze, jak by určili obvod takového čtverce. Učitel po krátké době tuto možnost zavrhuje, neboť shledává možné řešení za příliš zdlouhavé a složité. Jiný žák navrhuje použít osmiúhelník, učitel toto komentuje tak, že zase neurčí (jednoduše) délku strany osmiúhelníku. Učitel napovídá žákům a ptá se, kde určí délku strany jednoduše.

Část 2 (10:42–13:25) Užití šestiúhelníku k odvození vzorce pro obvod kruhu

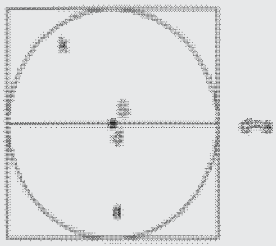
Žák navrhuje šestiúhelník. Učitel ukazuje, jak jednoduše vepsat šestiúhelník do kružnice, kreslí do obrázku na tabuli. Délku strany šestiúhelníku žáci určují jako poloměr kružnice. Žáci komentují, že je tento postup stále nepřesný. Navrhují dvanáctiúhelník, dále 24-úhelník, 48-úhelník, až 96-úhelník. Společně docházejí k závěru, že čím víc úhlů, tím víc se útvar blíží kružnici. Učitel říká žákům, že toto je ten postup, který uplatnil Archimédés. Učitel píše na tabuli poznámku, že Archimédés použil ke svým výpočtům 96-úhelník. Žáci opisují do sešitu.

Část 3 (13:26–26:20) Shrnutí

Učitel oznamuje žákům, že díky těmto úvahám přicházejí na to, že obvod čtverce je roven $4 \cdot d$, kde d je průměr kružnice. Obvod šestiúhelníku je roven $6 \cdot r$, kde r je poloměr kružnice. Společně se žáky zapisuje, že poloměr je polovina průměru, a zapisuje obvod šestiúhelníku jako $3 \cdot d$. Učitel sděluje žákům, že obvod kružnice tedy leží mezi čtyřnásobkem průměru a třínásobkem průměru kružnice. Učitel shrnuje předchozí úvahy. Na tabuli píše, že platí: délka kružnice závisí na … a vybízí žáky, aby tuto větu doplnili. Žáci doplňují, že na jejím průměru. Učitel připomíná učivo sedmého ročníku, a to přímou úměrnost. Na tabuli ještě píše, že tedy délka kružnice je přímo úměrná průměru kružnice. Ptá se žáků, zda si pamatují rovnici přímé úměrnosti. Společně docházejí k závěru, že $y = k \cdot x$. Učitel píše na tabuli, že $o = k \cdot d$, a zdůrazňuje, že k ještě neznají, ale bude ležet mezi čísly 3 a 4, tedy $3 < k < 4$. Učitel říká, že takto je k určeno velmi přibližně, a na tabuli píše, že v praxi si vystačí s tím, že $k \doteq 3{,}14$ nebo $k \doteq 22/7$. Říká, že jsou to čísla velmi zaokrouhlená, a využívá tabulky k tomu, aby se žáci sami přesvědčili. Učitel píše na tabuli, že číslo k označujeme π a že se mu říká Ludolfovo číslo. Doplňuje historickou poznámkou o Ludolfu van Ceulenovi, po kterém bylo číslo pojmenováno. Upozorňuje na to, že Ludolfovo číslo nelze vyjádřit zlomkem, proto hodnoty pro π jsou přibližné. Na tabuli píše, co platí pro obvod kruhu, tedy odvozený vzorec, případně dva vzorce – jeden využívá poloměr kruhu a druhý jeho průměr: $o = 2\pi r$, $o = \pi$d.

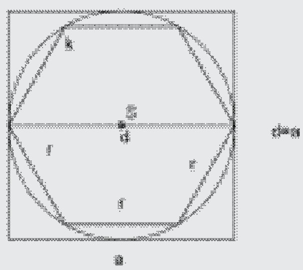
2 V popisu videozáznamu tedy budeme používat tyto dva pojmy tak, jak je používal učitel ve vyučovací hodině.

Přepis části vyučovací hodiny (U – učitel, Ž – žák, ŽŽ – žáci)
U: No a teď je problém, co s tou kružnicí. Obvod, obvod kruhu, nebo délku kružnice, to je otázka, jak na to jít. Řešili to už před zhruba dvěma tisíci lety, kdy na to přišel pan Archimédés. Poradil si s tím, jak najít obvod kruhu. Máte nápad? Jardo?
Ž: Tak … dá se tam udělat čtverec. Můžu to ukázat?
U: Můžeš.
Ž: [kreslí na tabuli][3]
U: Dobrý. Obvod čtverce znám. To dokážu snadno spočítat. Navíc, tu kružnici si musím uvědomit … uvědomit její vlastnosti. Že tohle, co tady Jarda nakreslil, vlastně odpovídá čemu? Čemu to odpovídá?
ŽŽ: [není rozumět]
U: Prosím?
Ž: Délce toho čtverce?
U: Ano, čili toto [kreslí na tabuli – obrázek 1] by byla délka čtverce. [myslí délku strany čtverce] A v té kružnici, co znamená ta modrá úsečka?



Obrázek 1

Ž: Přímka.
U: To není přímka … úsečka.
Ž: Průměr.
U: Průměr, ano průměr. Neboli Jarda tady navrhuje průměr kružnice srovnat, nebo porovnat se stranou čtverce. Neboli on tady říká, že d průměr je a [píše na tabuli]. No a z toho potom už by zjistil obvod kruhu, jo?
U: Co, čeho se tím dopouští? On nahradil délku kružnice obvodem kruhu [myslel tím nejspíše obvodem čtverce]. Je to v pořádku? Martine?
Ž: Není to přesný.
U: Není to přesný, prostě, ten útvar je evidentně jiný. Čili to nemůžu jenom tak jednoduše nahradit. No, tak to udělám přesněji. Jakou přesnější metodu bych mohl použít?
… [zde není zaznamenána diskuze, která je pro náš článek nepodstatná]
Ž: Anebo bych mohl udělat ten čtverec dovnitř.
U: Ano, to by šlo. To by bylo výborný. Udělat to dovnitř. Vepsat. Potíž je v tom, že když ten čtverec vepíšu, tak jakkoli je to tady jednoduchý, strana čtverce rovná se průměr. [ukazuje na opsaný čtverec na tabuli] Tak, když to vepíšu, tak už tam…mám to udělat? Moc se mi nechce ale. Víte proč? Když si ten obrázek trošku … Udělám to jen takové tenoučké, jo? [kreslí do obrázku na tabuli] Máš pravdu. Ale potom je ten průměr čím? Průměr je v tom čtverci čím? Průměr je ve čtverci …
Ž: Úhlopříčkou.
U: Úhlopříčkou. Průměr je ve čtverci úhlopříčkou a byla by s tím asi trochu starost, jak určit obsah [myslel nejspíše obvod] takového čtverce. Ne, že by to nešlo. Dokázali bysme to, ano? Dokázali bysme to. Nakonec … [ukazuje na tabuli, následně mávne rukou]. Zpět. Já jsem to tam, teď jsem ti to zkomplikoval. Dokázal bys něco jiného? Obvod čtverce by v tomto případě byl, obvod čtverce by byl problém. Proč? Protože ty neznáš u toho čtverce …
ŽŽ: Strany. Délky stran.
U: Strany. Dnes už byste to dokázali, vlastně, už třeba, když znáte druhou odmocninu, dokázali byste spočítat obsah tohoto čtverce. A z toho byste dokázali spočítat stranu, ano. Ale jednoduše byste na tu stranu nepřišli. Čili obvod tohoto čtverce neurčíš. Jinak.
Ž: Tak bych třeba použil osmiúhelník.
U: Osmiúhelník. Zase neurčíš stranu. Ale kde určíš stranu velice jednoduše?
Ž: Trojúhelník.
U: Trojúhelník, ne, taky ne. Stando?
Ž: Šestiúhelník.
U: Šestiúhelník. Vzpomínáte? Vezmete poloměr, opíšete, opíšete [kreslí na tabuli, viz obrázek 2]. Zabodnete, opíšete, opíšete. Poloměr. A co vám z toho pak vyjde? Je co?

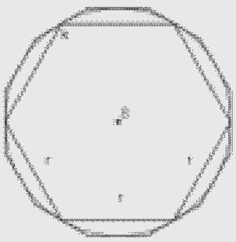


Obrázek 2

Ž: Šestiúhelník.
U: Šestiúhelník. Jakou má délku strany?

3 V hranatých závorkách jsou uvedeny poznámky autorky článku.

Ž: Poloměr.
U: S tím jsem to udělal, poloměrem. Vzal jsem do kružítka poloměr. Délka strany toho šestiúhelníka je?
Ž: Poloměr.
U: Poloměr.
Ž: Je to pořád nepřesný.
U: Je to pořád nepřesný, ano. Čili jak by to šlo upřesnit?
Ž: Šestnáctiúhelník.
U: Počkej, šestnácti …
ŽŽ: Dvanáct? Osm. Ne, dvanáctiúhelník?
U: Kolik?
Ž: Dvanácti.
U: Dvanácti, ano. To znamená, tady bych zvolil body [kreslí na tabuli, viz obrázek 3]. Dál? Zase byste nebyli spokojeni. Tohleto by byl dvanáctiúhelník. Potom byste mohli dělat …



Obrázek 3

Ž: Dvacetičtyř-, čtyřicetiosmi-, …
U: Až na devadesátišestiúhelník. To byste stejně nezvládli, ani ten dvanáctiúhelník byste ještě nezvládli.
Ž: Ale čím víc úhlů, …
U: Ale čím víc úhlů, tím se to víc blíží ke kružnici. A potom obvod toho nového mnohoúhelníka už můžu velice přesně přiřadit délce kružnice. To je ten postup, který uplatnil pan Archimédés.

Analýza

Vybraná situace je, jak již bylo zmíněno výše, pro běžnou výuku v ČR neobvyklá. Ve většině českých učebnic je Archimédův postup při odvozování vzorce pro výpočet délky kružnice jen zmíněn. Žáci si tedy pouze přečtou, že Archimédés využil 96-úhelník. Učitel nejspíš doufal, že žáci na daný vzorec přijdou téměř sami postupem podobným, jaký použil Archimédés.

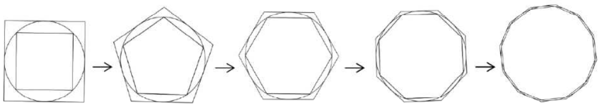
Archimédés popsal výpočet délky kružnice o daném poloměru ve svém díle O měření kruhu. Uvažoval, jak délku kružnice prakticky odhadnout: *Pokud do dané kružnice vepíšeme libovolný mnohoúhelník, pak jeho obvod bude menší než obvod kružnice, pokud naopak kolem kružnice mnohoúhelník opíšeme, bude jeho obvod větší než obvod kružnice.* Archimédés usoudil, že rozdíl mezi obvodem opsaného a vepsaného mnohoúhelníku bude tím menší, čím lépe se budou jejich hranice přibližovat dané kružnici, tedy čím kratší budou jejich jednotlivé strany (Šimša, 2004, s. 8). Tedy čím více stran bude mnohoúhelník mít, tím více se jeho obvod bude blížit délce kružnice.

Pokud se vrátíme k analyzované výukové situaci, problém vidíme v nepřesnostech ve vyjadřování učitele. Učitel se v úvodu zmiňuje o obvodech geometrických obrazců a následně říká, že pojmy obvod kruhu a délka kružnice můžeme libovolně zaměňovat a znamenají to samé. Není to ovšem úplně pravda. Pokud zmiňuje obvody známých geometrických obrazců, bylo by vhodné navázat obvodem kruhu. Ovšem Archimédés se snažil zjistit délku kružnice. Bylo by tedy třeba vysvětlit spojitost mezi obvodem kruhu a délkou kružnice (jakožto hranice geometrického obrazce – kruhu). Nepovažujeme za vhodné označení pan Archimédés. Nepřesností se zde vyskytuje více, nebudeme ale komentovat ty, které nejsou podstatné pro hodnocení kvality výuky.

Troufáme si říci, že někteří žáci z této třídy jsou matematicky velmi zdatní. A tak učitel spolupracuje především s těmito žáky. Hned po položení otázky, co s obvodem kruhu, totiž jednoho žáka napadá, že kružnici opíšeme čtverec. Je možné, že mu k tomu dopomohl obrázek vedle na tabuli. Učitel tam totiž v úvodu hodiny načrtl čtverec a obdélník a zapsal vzorce pro výpočty jejich obvodů. Žák sám aktivně obrázek kreslí na tabuli. Dále se učitel i žáci shodují, že nahradit obvod kruhu obvodem čtverce opsaného tomuto kruhu je nepřesné. Další návrh je čtverec vepsat do kružnice. Učitel nejprve hodnotí tento návrh velmi kladně. Po chvíli však tento návrh zavrhuje jako moc složitý. Hovoří však o případném využití obsahu čtverce a následném využití druhé odmocniny pro určení délky strany čtverce. Z tohoto komentáře usuzujeme, že žáci ještě neprobírali Pythagorovu větu. Zcela jistě však mají probráno učivo druhé mocniny a odmocniny. Dále se však učitel tomuto návrhu nevěnuje a posouvá žáky k odpovědi, kterou, jak se zdá, chce slyšet.

Ptá se, kde jednoduše určíme délku strany. Žáci navrhují možnosti, jako je osmiúhelník, trojúhelník, ty učitel přehlíží a vyvolává žáka, který navrhuje šestiúhelník. Učitel začne do obrázku na tabuli rýsovat šestiúhelník a vlastně žákům připomíná a napovídá, jak se takový pravidelný šestiúhelník sestrojí. Pro žáky je pak jednoduché odpovědět, že délka strany šestiúhelníku je rovna poloměru kružnice, do které je šestiúhelník vepsán. Jiný žák aktivně namítá, že je nahrazení obvodu kruhu obvodem daného šestiúhelníku opět nepřesné. Hledá se tedy přesnější řešení, učitel zakresluje dvanáctiúhelník do obrázku na tabuli, komentuje to však jen tím, že si zvolíme body a spojíme je. Následuje pouze diskuze o tom, že bychom mohli použít 24-úhelník, 48-úhelník, 96-úhelník, bez bližšího vysvětlení. Nejsme si zcela jisti, zda bylo všem žákům jasné, proč se počet úhlů v mnohoúhelníku dvojnásobí. A proč se vůbec hovoří o počtu úhlů, když je podstatný počet stran.

Přitom se zde vyskytuje ten důležitý moment, kdy je třeba pochopit, že obvod n-úhelníku se určí jako $n \cdot a$, kde a je délka strany n-úhelníku, a že s rostoucím počtem stran vepsaného (a opsaného) n-úhelníku se jeho obvod blíží obvodu kruhu (viz obrázek 4). Následně je třeba si uvědomit, že obvod kruhu závisí (pouze) na jeho průměru (poloměru), tedy $o = k \cdot d$. V poslední řadě je nutno určit o jaké číslo k se jedná.



Obrázek 4

Alterace

Posuzování kvality výukové situace

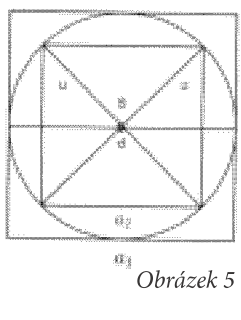
Pozitivně vnímáme snahu učitele o propojení výuky s historií matematiky. Jedná se jistě o jednu z možností, jak motivovat žáky. Ovšem je třeba podávat přesné historické údaje, i v tomto jsme zde shledali určité rezervy. Vidíme zde i možnost práce s případnými chybnými odpověďmi a návrhy řešení. Bohužel chybné odpovědi zde učitel často přecházel, někdy jen částečně okomentoval. Některé návrhy, které by také vedly ke správnému výstupu, ovšem zavrhl. Například možnost, že by se obvod kruhu dal řešit také pomocí čtverce vepsaného do kružnice. Dopustil se tím didaktické chyby, kterou v terminologii metodiky 3A nazýváme odcizené poznávání – žáci se nemohli zapojit do aktivní činnosti s obsahem, která by směřovala k pochopení učiva. Zdá se však, že na didakticky lepší řešení nejprve sám pomýšlel. Na tabuli dokonce zakreslil vepsaný čtverec velmi vhodně, a to tak, že průměr kružnice byl úhlopříčkou ve čtverci, ovšem dále okomentoval řešení jako složité a s žáky se jím dále nezabýval. V této fázi vidíme alternativní možnost navrhovaný způsob řešení dokončit, dopočítat.

Návrh alterace

Pokud by učitel začal vyučovací hodinu opakováním obvodů geometrických obrazců, které již žáci znají, bylo by dobré pokračovat otázkou, jak odvodit vzorec pro výpočet obvodu kruhu. Následně vysvětlí, že hranicí kruhu je kružnice, u které můžeme určovat její délku, neboť délka je míra ohraničené části křivky. Je tedy vyjádřena číslem. Pokud mluvíme o délce kružnice, je to zároveň obvod kruhu. Žáci budou tedy zjišťovat délku kružnice, jako to dělal Archimédés.

Na tabuli učitel narýsuje kružnici. Nechá žáky, aby zakreslili opsaný i vepsaný čtverec kružnici. Nechá je přemýšlet, jaký je vztah mezi délkou úhlopříčky ve čtverci a délkou obvodu čtverce. Nechá žáky přijít na to, že čím větší je délka obvodu čtverce, tím větší je délka úhlopříčky. Délka úhlopříčky ve čtverci vepsaném kružnici je rovna průměru kružnice. Přičemž délka úhlopříčky čtverce vepsaného kružnici je délka strany čtverce opsaného kružnici. Dále je nechá zjistit, že délku kružnice je potřeba hledat mezi délkou obvodu čtverce vepsaného a délkou obvodu čtverce opsaného kružnici.

Ukázka řešení: Předpokládáme, že máme k dispozici (velký) čtverec opsaný. Druhý (malý) čtverec vepíšeme do kružnice a řešíme délku strany tohoto malého čtverce.



Obrázek 5

Jelikož není jisté, zda žáci již probírali Pythagorovu větu, můžeme využít tabulky (které se sice dnes už moc nevyužívají, ale existují různé náhradní možnosti, jako je internet, „taháky do kapsy“, didaktické plakáty, vzorce zapsané do sešitu apod.), kde zjistíme, že úhlopříčka ve čtverci se určí ze vzorce $u = \sqrt{2} \cdot a$, kde u je úhlopříčka a a je strana čtverce.

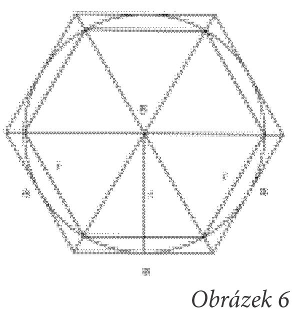
Z obrázku 5 vidíme, že úhlopříčka v malém čtverci je vlastně průměr kruhu d, můžeme říct, že délka strany malého čtverce je $a_2 = (\sqrt{2} / 2) \cdot d$. Obvod malého čtverce je tedy $o_M = 4 \cdot (\sqrt{2} / 2) \cdot d = 2\sqrt{2} \cdot d$. Obvod velkého čtverce je $o_V = 4 \cdot d$. Pokud bychom využili tyto dva čtverce a jejich obvody, pro obvod kruhu by platilo, že leží někde mezi obvodem velkého čtverce a malého čtverce, tedy $o_M < o < o_V$.

Druhá možnost je využít dvou vzorců pro výpočet obsahu čtverce $S = (u \cdot u) / 2 = a^2$ (kde u je úhlopříčka a a je strana čtverce) a z nich určit délku strany malého čtverce stejně, jako je to uvedeno výše.

Pokud ovšem žáci mají učivo Pythagorovy věty probráno, je možnost vzorec pro výpočet úhlopříčky ve čtverci odvodit a následně postupovat tak, jak je uvedeno výše. Podle Pythagorovy věty totiž platí: $a_2^2 = (u / 2)^2 + (u / 2)^2$.

Domníváme se však, že využít pouze opsaný a vepsaný čtverec žákům nestačí k tomu, aby si uvědomili, že obvod kruhu je závislý na jeho průměru (poloměru).

Stejný postup bychom tedy provedli s dalším navrhovaným mnohoúhelníkem, a to pravidelným šestiúhelníkem (v dalším budeme psát pouze šestiúhelník).



Obrázek 6

U vepsaného šestiúhelníku z obrázku 6 vidíme, že délka jeho strany je rovna délce poloměru kruhu r. U opsaného šestiúhelníku je třeba zjistit délku jeho strany a. Víme, že pravidelný šestiúhelník je „složen“ ze šesti rovnostranných trojúhelníků. V rovnostranném trojúhelníku platí $v = (\sqrt{3} / 2) \cdot a$, kde v je výška trojúhelníku a a je strana trojúhelníku. Opět žáci mohou dohledat v tabulkách (na internetu). V našem případě je výška trojúhelníku rovna poloměru kruhu, dostaneme tedy $r = (\sqrt{3} / 2) \cdot a \Rightarrow a = (2\sqrt{3} \cdot r) / 3$. Obvod (malého) vepsaného šestiúhelníku je $o_M = 6 \cdot r = 3 \cdot d$ a obvod (velkého) opsaného šestiúhelníku je $o_v = 6 \cdot (2\sqrt{3} \cdot r) / 3 = 4\sqrt{3} \cdot r = 2\sqrt{3} \cdot d$. Zde opět platí pro obvod kruhu o následující: $o_M < o < o_V$. Celkem máme pro obvod kruhu o tato tvrzení: $2\sqrt{2} \cdot d < o < 4 \cdot d$ a $3 \cdot d < o < 2\sqrt{3} \cdot d$.

Žáci by se měli nejlépe sami dostat k závěru, že obvod kruhu je závislý na jeho průměru (poloměru). Platí totiž analogická úvaha jako pro délku úhlopříčky čtverce a délku obvodu čtverce (viz výše).

Určíme ho tedy jako $o = k \cdot d$, kde k je neznámá konstanta. Právě jsme zjistili, že $2\sqrt{2} < k < 4$, přesněji, že $3 < k < 2\sqrt{3}$, ale neznáme její přesnou hodnotu. Víme pouze, že leží někde mezi čísly 3 a $2\sqrt{3} \doteq 3{,}464$.

Nyní bychom místo pouhého zápisu 3,14 ještě žáky nechali přemýšlet, jak můžou toto číslo určit. Když tedy nemůžeme použít 96-úhelník jako Archimédés, tak si vystačíme s tím, co umíme. Narýsujeme kruh o daném průměru, např. $d = 6\ cm$. Vezmeme provázek a přiložíme jej na hranici kruhu. Ustřihneme ho tam, kde se setká s počátkem provázku. Následně provázek natáhneme jako přímku, přiložíme na dlouhé pravítko a změříme jeho délku. Tím zjistíme délku hranice kruhu, tedy jeho obvod. Zapíšeme. Toto provedeme ještě jednou s jiným průměrem kruhu, např. $d = 8\ cm$. Již víme, že obvod kruhu se určí jako k-násobek průměru kruhu. Z těchto dvou experimentů zjistíme hodnotu konstanty k.

$o_1 = 18{,}8495 \doteq k \cdot 6 \Rightarrow k \doteq 3{,}1415$
$o_2 = 25{,}1327 \doteq k \cdot 8 \Rightarrow k \doteq 3{,}1415$

Nyní již můžeme zmínit, že Ludolf van Ceulen toto číslo v 16. století určil na 32 desetinných míst, označujeme ho π a někdy je nazýváno Ludolfovo číslo. Závěrem je, že obvod kruhu o se určí ze vzorce $o = \pi d$, kde d je průměr kruhu, nebo $o = 2\pi r$, kde r je poloměr kruhu.

Žáci by měli odhalit princip Archimédova postupu – totiž, že čím více stran má n-úhelník, tím více se jeho délka blíží délce kružnice (obvodu kruhu) s průměrem odpovídajícím úhlopříčce n-úhelníku.

Mgr. Lucie Ziembová vystudovala obory Učitelství matematiky pro SŠ na PřF a Speciální pedagogika na PdF Masarykovy univerzity. V současné době působí jako doktorandka na Institutu výzkumu školního vzdělávání PdF MU a vyučuje na brněnské základní škole.

lucie.ziembova@gmail.com

Přezkoumání navržené alterace

Navržená alterace by nabídla didakticky kvalitnější řešení výukové situace. Žáci by si více propojili své znalosti z matematiky, mohli by navrhovat své postupy řešení úlohy, využilo by se širšího spektra didaktických postupů, čímž by se zvýšil předpoklad, že učivu porozumí více žáků. V průběhu činnosti by tedy žáci mohli využít svých zkušeností při utváření matematického obsahu (pochopení daného učiva). Tím by byly splněny předpoklady ke kognitivní aktivizaci žáků, což je, jak bylo zmíněno výše, jeden z prvků produktivní kultury vyučování a učení.

Tento postup by ovšem mohl způsobit potíže ve vztahu k učivu, které se má dle vzdělávacích programů probrat. Možnou nevýhodou by bylo, že by učitel věnoval této problémové úloze daleko více času a třeba by nestihl zadat úlohy, kde žáci pouze využívají již odvozený vzorec pro konkrétní zadané hodnoty (jak tomu bylo na konci této vyučovací hodiny). Možné také je, že by se tento postup musel rozložit do dvou vyučovacích hodin, což prozatím není v našich poměrech příliš běžné.

Závěr

Jak bylo uvedeno, v rozebírané výukové situaci se vyskytují prvky produktivní kultury vyučování a učení. Oceňujeme zejména zajímavé uchopení problematiky obvodu kruhu a zvolenou motivaci z historie matematiky. Objevuje se zde však také několik nedostatků. Navržená alterace vybrané výukové situace je pouze jednou z možností, jak řešení problémové úlohy ještě více svěřit žákům. To ovšem nese jistá rizika. Učitel by měl být opravdovým odborníkem ve svém oboru (v matematice a její didaktice) – měl by být schopen vysledovat, kdy žáky navrhované postupy vedou ke správnému řešení a kdy směřují do slepé uličky, aby na základě toho mohl ovlivňovat další práci s úlohou. Cesta do slepé uličky vyžaduje odvahu, neboť se zakládá na konstruktivní práci s chybou, což je další z rysů produktivní kultury vyučování a učení. Učitel zde vystupuje jako iniciátor a moderátor diskuze a rozvíjí žákovo matematické myšlení. Žáci zde mohou mít pocit, že k řešení tohoto problému dospěli sami. Také je vhodné žákům ukázat, že v matematice mohou postupovat více způsoby (pokud jsou ovšem matematicky správné) a vždy dojdou ke stejnému (správnému) výsledku.

Literatura

Hejný, M. & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Hiebert, J. et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study*. USA: National Center for Education Statistics. Dostupné také z http://nces.ed.gov/pubsearch

Janík, T. et al. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Brno: Masarykova univerzita.

Janík, T. (2013). Od reformy kurikula k produktivní kultuře vyučování a učení. *Pedagogická orientace, 23*(5), 634–663.

Stehlíková, N. (2007). Charakteristika kultury vyučování matematice. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, & M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 13–48). České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Šimša, J. (2004). Huygensovo vylepšení Archimédovy metody. In J. Bečvář, & E. Fuchs (Eds.), *Matematika v proměnách věků. III* (s. 6–31). Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy. Dostupné z http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401592/DejinyMat_24-2004-1_4.pdf